0239

95342
repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2004

concours externe
de recrutement de professeurs agrégés

section : mathématiques

composition d'analyse et probabilités

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche, y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout document et de tout autre matériel électronique est interdit.

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Le but du problème est de donner une preuve partielle du théorème de la variété stable.

Préliminaires et notations

Préliminaires généraux

Dans tout le problème, k désigne un entier strictement positif; $\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels, $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. Le complémentaire d'un sous-ensemble Y dans X est noté $X - Y$.

Si E et F sont des espaces vectoriels, $\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F, $\mathrm{End}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathrm{Aut}(E)$ celui des automorphismes de E. Le déterminant d'un endomorphisme A est noté $\det A$.

Dans $\mathbb{R}^k$, le produit scalaire canonique de deux vecteurs u et v est noté $< u,v >$.

Si f est un homéomorphisme d'un espace métrique (X,d), on désigne par f^n la n-ième itérée de f. Si x est élément de X, la variété[1] stable pour f du point x est l'ensemble

$$W_x^s(f) = \{y \in X \mid \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}.$$

De même, la variété instable pour f du point x est l'ensemble

$$W_x^u(f) = \{y \in X \mid \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}.$$

Soit γ un réel strictement positif. On rappelle qu'une application f d'un espace métrique (X,d) dans lui-même est lipschitzienne de rapport γ (ou γ-lipschitzienne) si

$$\forall (x,y) \in X^2,\ \ d(f(y), f(x)) \leqslant \gamma\, d(x,y).$$

On note Li_γ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γ-lipschitziennes s'annulant en 0.

Fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$

Dans les parties 1, 4 et 5, $\mathbb{R}^2$ sera muni de la norme $|(x_1,x_2)| = \max\{|x_1|,|x_2|\}$.

Soit h une application bornée, élément de $C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et dont la différentielle $\mathrm{d}h$ est bornée. On note :

- $|h|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^2} |h(x)|$;
- $\mathrm{d}h_x$ la différentielle de h au point x $\left(\mathrm{d}h_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})\right)$;
- $\|\mathrm{d}h_x\|$ la norme subordonnée dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ de $\mathrm{d}h_x$;
- $|\mathrm{d}h|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \|\mathrm{d}h_x\|$;

et on pose $|h|_{C^1} = \max(|h|_\infty, |\mathrm{d}h|_\infty)$.

Liens entre les différentes parties

- *la partie* 3 *utilise les résultats de la partie* 2 *;*
- *la partie* 4 *utilise les résultats des parties* 1 *et* 2 *;*
- *la partie* 5 *est indépendante du reste du problème.*

Les candidats peuvent admettre les résultats d'une question à condition de l'indiquer clairement et poursuivre le problème en respectant la numérotation des questions.

1. **Dans ce problème, le mot variété est juste une notation.**

1. Introduction

1.1. Montrer que l'application $d_\gamma : (\varphi,\psi) \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}-\{0\}} \frac{|\psi(x)-\varphi(x)|}{|x|}$, définie sur $(Li_\gamma)^2$, est une distance.

1.2. Montrer que, pour la métrique définie par la distance d_γ, Li_γ est complet.

1.3. Soient $\mu > 0$, $h \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $\varphi \in Li_\gamma$ tels que $|h|_{C^1}(1+\gamma) < \mu$.
Montrer que l'application G_φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_\varphi(x) = \mu x + h\big(x,\varphi(x)\big),$$

est strictement croissante. En déduire que G_φ un homéomorphisme de $\mathbb{R}$.

2. Partie linéaire

Soit A un endomorphisme de $\mathbb{R}^k$. Le rayon spectral $r(A)$ est par définition le maximum des modules des valeurs propres complexes de A.

2.1. Soit ε' un réel strictement positif. Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^k$ dans laquelle la matrice

$$a = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant k}}$$

de A est triangulaire supérieure et telle que pour tous i et j vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant k$, on ait $|a_{i,j}| \leqslant \varepsilon'$.

2.2. En déduire que pour tout réel ε strictement positif, il existe sur $\mathbb{R}^k$ une norme notée N dite ε-adaptée pour A, c'est-à-dire telle que pour la norme d'opérateur subordonnée $\|\cdot\|_N$:

$$\|A\|_N \leqslant r(A) + \varepsilon.$$

2.3. Montrer que, pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^k$ et tout réel ε strictement positif, il existe une constante C_ε strictement positive telle que, pour tout $v \in \mathbb{R}^k$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|A^n v\| \leqslant C_\varepsilon (r(A)+\varepsilon)^n \|v\|.$$

On dira que $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^k)$ est hyperbolique si toutes ses valeurs propres complexes ont un module différent de 1.

Dans toute la suite de cette partie, A désigne un endomorphisme hyperbolique de $\mathbb{R}^k$.

2.4. Montrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires E^+ et E^- de $\mathbb{R}^k$ stables par A tels que la restriction de A à E^+ (resp. E^-) ait toutes ses valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) de module strictement supérieur (resp. inférieur) à 1.

On désigne par $A_{|E}$ la restriction de A au sous-espace E.

2.5. Montrer que $(A_{|E^+})$ est inversible.

Tournez la page S.V.P.

2.6. Montrer qu'il existe une norme dite A-adaptée $\|\cdot\|$ telle que

$$\forall (x^+, x^-) \in E^+ \times E^-,\ \|x^+ + x^-\| = \max(\|x^+\|,\|x^-\|)$$

et de plus pour la norme subordonnée :

$$\|A_{|E^-}\| < 1 \quad \text{et} \quad \|(A_{|E^+})^{-1}\| < 1.$$

2.7. Montrer que, pour tout $v \in E^-$, la suite $(A^n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2.8. Montrer de même que, pour tout $v \in E^+$ non nul, la suite $\left(\|A^n(v)\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Préliminaires pour les parties 3 et 4

Le tore $\mathbb{T}^k$ est par définition le groupe additif quotient du groupe $(\mathbb{R}^k,+)$ par le sous-groupe $(\mathbb{Z}^k,+)$. Tout élément x de $\mathbb{T}^k$ peut s'écrire de manière unique $x = (x_1, \ldots, x_k)$, avec $x_i \in \mathbb{T}^1$, pour $i = 1, \ldots, k$.
On définit la projection canonique $\Pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k = \mathbb{T}^k$.

3. Linéarité et topologie

On considére le sous-ensemble $E = \{L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^k) \mid L(\mathbb{Z}^k) \subset \mathbb{Z}^k\}$ de $\mathrm{End}(\mathbb{R}^k)$ ainsi que le sous-ensemble $\mathcal{E} = \{L \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^k) \mid L \in E \text{ et } L^{-1} \in E\}$ de $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^k)$.

3.1. Montrer qu'un élément L de $\mathrm{End}(\mathbb{R}^k)$ appartient à E si, et seulement si, sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^k$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

3.2. Montrer qu'un élément L de E appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement si, $\det L$ vaut -1 ou 1.

3.3. Dans cette question, on se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère l'endomorphisme L défini, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par $L(x,y) = (2x+y, x+y)$. Cet endomorphisme est-il hyperbolique ? Est-il dans l'ensemble $\mathcal{E}$?
Existe-t-il des exemples comparables sur $\mathbb{R}$?

Dans toute la suite de cette partie 3, L désigne un élément hyperbolique de $\mathcal{E}$. Les sous-espaces vectoriels E^+ et E^- sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^k$ stables par L tels que la restriction de L à E^+ (resp. E^-) ait toutes ses valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) de module strictement supérieur (resp. inférieur) à 1 ; l'existence de cette décomposition a été démontrée au 2.4.

On dit qu'un élément x de $[0,1]^k$ est un point périodique de L s'il existe un entier p strictement positif tel que $L^p(x) - x$ appartient à $\mathbb{Z}^k$. On désigne par $\mathrm{Per}L$ l'ensemble des points périodiques de L.

3.4. Démontrer que l'ensemble des points périodiques de L est donné par

$$\mathrm{Per}L = \mathbb{Q}^k \cap [0,1]^k.$$

En déduire que $\mathrm{Per}L$ est densé dans $[0,1]^k$.

3.5. Montrer que pour une distance donnant la topologie usuelle, les variétés stables et instables pour L d'un point a de $\mathbb{R}^k$ sont respectivement $W^s_a(L) = a + E^-$ et $W^u_a(L) = a + E^+$.

3.6. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^k$. On définit une application d de $\mathbb{T}^k \times \mathbb{T}^k$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$d(y,y') = \inf\{N(x-x') \mid x,x' \in \mathbb{R}^k \text{ avec } \Pi(x) = y \text{ et } \Pi(x') = y'\}.$$

(1) Montrer que $\inf\limits_{z \in \mathbb{Z}^k - \{0\}} N(z)$ est strictement positif.

(2) Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{T}^k$.

(3) Prouver que l'application $\Pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{T}^k$ est continue.

Dans la suite, $\mathbb{T}^k$ est muni de la topologie associée à la distance d.

3.7. Montrer que L induit un homéomorphisme noté F_L du tore $\mathbb{T}^k$ satisfaisant la relation de commutation

$$F_L \circ \Pi = \Pi \circ L.$$

La suite de cette partie n'est pas utilisée dans le reste du problème.

3.8. On suppose que la distance d provient d'une norme N adaptée pour L. Montrer que :

(1) $\Pi(0 + E^-) \subset W_0^s(F_L)$;

(2) $\Pi(0 + E^+)$ est dense dans $\mathbb{T}^k$;

(3) la variété stable pour F_L du point 0 est dense dans $\mathbb{T}^k$.

Une application continue $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$ est dite topologiquement mélangeante si, pour toute paire d'ouverts non vides U et V de $\mathbb{T}^k$, il existe un entier n_0, tel que :

$$\forall n > n_0,\ f^n(U) \cap V \neq \varnothing.$$

3.9. Montrer qu'une isométrie de $\mathbb{T}^k$ n'est pas une application topologiquement mélangeante.

3.10. Montrer que F_L est une application topologiquement mélangeante.

Indication : *On pourra utiliser, outre le fait que 0 est un point fixe, la densité de la variété stable pour un automorphisme hyperbolique F_L du point 0 ainsi que la densité de la variété stable pour F_L^{-1} du point 0.*

4. Un exemple presque linéaire dans $\mathbb{R}^2$

Dans la partie 4, f est une application élément de $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, fixant l'origine et proche en C^1-topologie d'un automorphisme linéaire hyperbolique diagonal A défini, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par $A(x,y) = (\mu x, \lambda y)$ avec $0 < \lambda < 1 < \mu$. Ceci signifie que f est de la forme

$$f(x,y) = \big(\mu x + \alpha(x,y), \lambda y + \beta(x,y)\big)$$

avec α et β vérifiant $\alpha(0,0) = 0$, $\beta(0,0) = 0$ et il existe un réel δ, strictement positif, tel que $|\alpha|_{C^1} < \delta$ et $|\beta|_{C^1} < \delta$.

Dans la suite δ sera considéré comme petit, ce qui sera précisé par des inégalités.

Tournez la page S.V.P.

4.1. Prouver que si $2\delta < \lambda$, f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Indication : *On pourra montrer que pour tout $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ l'application*

$$F_{(x',y')} : (x,y) \mapsto \left(\frac{x'}{\mu} - \frac{\alpha(x,y)}{\mu}, \frac{y'}{\lambda} - \frac{\beta(x,y)}{\lambda} \right)$$

est lipschitzienne de rapport a, avec $0 < a < 1$.

Inégalités (*)

Dans toute la suite de cette partie on suppose qu'il existe un nombre γ vérifiant les inégalités

$$(*) \begin{cases} 0 < \gamma < 1 \\ 0 < \delta < \dfrac{\gamma(\mu - \lambda)}{\gamma + 2} \end{cases}$$

Le graphe d'une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$H\varphi = \{ (x, \varphi(x)) \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

Dans la suite, on considère l'application G_φ définie, pour tout x réel, par

$$G_\varphi(x) = \mu x + \alpha(x, \varphi(x)).$$

4.2. Montrer que si φ est élément de Li_γ il existe une fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $f(H\varphi) = H\psi$.

4.3. Montrer que $f_* : \varphi \mapsto \psi$, définie à la question précédente, est une application de Li_γ dans lui-même.

4.4. Prouver pour tous φ et φ' dans Li_γ et pour tout x dans $\mathbb{R}$, l'inégalité

$$\left| f_*(\varphi)(G_\varphi(x)) - f_*(\varphi')(G_\varphi(x)) \right| \leqslant \left(\lambda + \delta(1 + \gamma) \right) \left| \varphi'(x) - \varphi(x) \right|.$$

4.5. En déduire qu'il existe une application φ^+ dans Li_γ dont le graphe H_{φ^+} est invariant par f.

4.6. Prouver l'inégalité $\left| f(x, \varphi^+(x)) \right| \geqslant (\mu - \delta) \left| (x, \varphi^+(x)) \right|$.

4.7. Pourquoi, si γ, δ satisfont les inégalités (*) et si δ est suffisamment petit, peut-on dire que l'ensemble $\{ (x, \varphi^+(x)) \mid x \in \mathbb{R} \}$ est contenu dans la variété instable pour f du point (0,0) ?

Commentaires sur les variétés stables et instables

On prouverait avec les mêmes arguments l'existence d'une variété stable de l'origine qui est le "graphe vertical" d'une fonction lipschitzienne $\varphi^- \in Li_\gamma$ c'est-à-dire

$$W_0^s(f) = \{ (\varphi^-(x), x) \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

On pourrait aussi montrer que les variétés stables et instables sont en fait des graphes d'applications de classe C^1.

5. Différentiabilité des fonctions lipschitziennes

Soit $\varphi \in Li_\gamma$ et $x \in \mathbb{R}$; on introduit, pour $y \neq x$, $\Delta_y\varphi = \dfrac{(y,\varphi(y)) - (x,\varphi(x))}{|(y,\varphi(y)) - (x,\varphi(x))|}$, on pose :

$$U_x\varphi = \left\{v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \lim_{n\to\infty} x_n = x,\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \neq x \text{ et } \lim_{n\to\infty} \Delta_{x_n}\varphi = v\right\}$$

et on définit l'ensemble tangent au graphe de φ au point x comme

$$T_x\varphi = \bigcup_{v\in U_x\varphi} \mathbb{R}v, \text{ avec } \mathbb{R}v = \{av \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

5.1. Montrer que $\mathrm{pr}_1(T_x\varphi) = \mathbb{R}$ où pr_1 est la projection sur le premier facteur :

$$\text{pour } u = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{pr}_1(u) = u_1.$$

Indication : *On pourra remarquer que pour tout* $y \neq x$, $|\Delta_y\varphi| = 1$.

5.2. Le cône horizontal H^γ est l'ensemble $H^\gamma = \left\{(u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |u_2| \leqslant \gamma|u_1|\right\}$.
Montrer l'inclusion $T_x\varphi \subset H^\gamma$.

5.3. On considère la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x non nul par

$$\phi(x) = \frac{x}{2} \cdot \sin(\ln|x|).$$

Appartient-elle à Li_γ pour un certain γ ? Expliciter $T_0\phi$.

5.4. On suppose que $\gamma \leqslant 1$. Montrer que, si $T_x\varphi$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$, alors φ est dérivable en x.